Ονοματεπώνυμο

Αριθμός Μητρώου:

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

22 Σεπτεμβρίου 2022

Θέμα 1 Έστω $\vec{x}$ και $\vec{y}$ δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^3$. Αποδείξτε τις ταυτότητες:

(α) $\|\vec{x} \times \vec{y}\,\|^2 = \|\vec{x}\,\|^2 \|\vec{y}\,\|^2 - \langle \vec{x}\,, \vec{y}\,\rangle^2$.

(β) $\|\vec{x} \times \vec{y}\,\|^2 = \langle \vec{x}\,, \vec{y} \times (\vec{x} \times \vec{y}\,)\rangle$.

Θέμα 2 Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$, δίνεται η ευθεία (ε) με παραμετρικές εξισώσεις $(x, y, z) = (1 + t, 2t, 1 + t)$, $t \in \mathbb{R}$, και το επίπεδο (π) με αναλυτική εξίσωση $x - y + z = 0$.

(α) Αποδείξτε ότι η ευθεία (ε) δεν έχει κανένα κοινό σημείο με το επίπεδο (π).

(β) Υπολογίστε την ελάχιστη απόσταση της ευθείας (ε) και του επιπέδου (π).

Θέμα 3 Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$, θεωρούμε τις σφαίρες

$$S_a : x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad \text{και} \quad \Sigma : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1.$$

όπου a είναι μια πραγματική θετική σταθερά.

(α) Για ποιες τιμές του a, οι σφαίρες S_a και Σ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, δηλαδή για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ ισχύει $S_a \cap \Sigma = \emptyset$;

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχουν μόνο δύο τιμές a_1 και a_2, για τις οποίες οι σφαίρες S_{a_1} και S_{a_2} έχουν μόνο ένα κοινό σημείο με την Σ, δηλαδή υπάρχουν μόνο δύο τιμές $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $S_{a_1} \cap \Sigma = \{P_1\}$ και $S_{a_2} \cap \Sigma = \{P_2\}$.

(γ) Να βρεθούν οι αριθμοί a_1, a_2 καθώς και τα σημεία P_1, P_2 του ερωτήματος (β).

(δ) Να βρείτε τα εφαπτόμενα επίπεδα της σφαίρας Σ στα σημεία P_1 και P_2.

Θέμα 4 Στον χώρο $\mathbb{R}^3$ και σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, τι παριστάνει καθέ μια από τις παρακάτω εξισώσεις;

$(a): \ x(z-5)=0, \quad (b): \ x^4 - x^2y^2 + y^4 = 0, \quad (c): \ x^2+y^2=1$ και $z^2=1,$

$(d): \ xy(z-1)=0, \quad (e): \ x^2=1, \quad (f): x^4+y^6+x^8y^{10}z^2=0\,.$

Δικαιολογείστε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Θέμα 5 Υποθέτουμε ότι A είναι ένας συμμετρικός (3×3)-πίνακας με πραγματικούς συντελεστές και συμβολίζουμε με Q την τετραγωνική μορφή ο πίνακας του οποίου είναι ο A. Έστω το σύνολο

$$\Sigma = \{(x,y,z) : Q(x,y,z)=0\}.$$

Δείξτε ότι:

(α) Πάντα υπάρχει μια τριάδα αριθμών (x_1,x_2,x_3) έτσι ώστε $Q(x_1,x_2,x_3)=0$.

(β) Εάν $Q(x_1,x_2,x_3)=0$ τότε, για κάθε $t\in\mathbb{R}$, ισχύει ότι $Q(tx_1,tx_2,tx_3)=0$.

(γ) Το σύνολο Σ δεν μπορεί να παριστάνει ποτέ σφαίρα ούτε ελλειψοειδές.

(δ) Υπάρχει κάποια περίπτωση να ισχύει $\Sigma=\mathbb{R}^3$.

Παρατηρήσεις:

(α) Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες.

(β) Τα θέματα είναι ισοδύναμα.

(γ) Σοβαρά μαθηματικά λάθη θα επηρεάσουν αρνητικά τη βαθμολογία.

(δ) Απαντήσεις που δεν είναι τεκμηριωμένες δεν λαμβάνονται υπόψιν.